

我是8位的

I am 8 bits, what about you?

随笔 - 205, 文章 - 0, 评论 - 103, 阅读 - 101万

导航

博客园

首页

新随笔

联系

订阅

管理

<

2022年3月

>

日	一	二	三	四	五	六
27	28	1	2	3	4	5
6	7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26
27	28	29	30	31	1	2
3	4	5	6	7	8	9

公告

你的支持是我的动力

欢迎关注微信公众号“我是8位的”



昵称：我是8位的

园龄：4年7个月

粉丝：288

关注：5

+加关注

盖楼抽奖

#她的梦想在发光#

HWD科技女性故事有奖征集

分享最打动你的科技女性故事

活动时间：2022年3月8日-3月18日

马上参与



搜索

找找看

谷歌搜索

常用链接

我的随笔

我的评论

我的参与

最新评论

我的标签

积分与排名

积分 - 457097

排名 - 1198

多变量微积分笔记6——拉格朗日乘数法

基本的拉格朗日乘子法(又称为拉格朗日乘数法)，就是求函数 $f(x_1,x_2,\dots)$ 在 $g(x_1,x_2,\dots)=C$ 的约束条件下的极值的方法。其主要思想是引入一个新的参数 λ （即拉格朗日乘子），将约束条件函数与原函数联系在一起，使能配成与变量数量相等的等式方程，从而求出得到原函数极值的各个变量的解。拉格朗日乘子是数学分析中同一名词的推广。

什么是拉格朗日乘数法

简单地说，拉格朗日乘数法是用来最小化或最大化多元函数的。如果有一个方程 $f(x,y,z)$ ，在这个方程里的变量之间不是独立的，也就是说这些变量之间是有联系的，这个联系可能是某个方程 $g(x,y,z) = C$ ；也就是 $g(x,y,z) = C$ 定义了 x,y,z 之间的关系，这个关系对变量做出了一定的限制，我们需要在这个限制下来最小化或最大化 $f(x,y,z)$ 。

这里的最值不能简单地使用临界点，因为临界点通常不满足关系方程 g 。如何解决这个问题呢？当这个限制 $g(x,y,z)$ 非常简单的时候，我们可以解出其中一个变量的表达式，把这个表达式代入 $f(x,y,z)$ 后求得最值，这也是中学阶段常用的方法。但问题是，很多时候我们并不能解出 x,y,z ，因为关系方程 g 太复杂了，这就需要有一个全新的方法求解，拉格朗日乘数法就是其中一种。

寻找最值

示例：找出双曲线 $xy = 3$ 上离原点最近的点。

如果 (x,y) 是曲线上的点，原点到该点的距离是：

$$f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

求离原点最近的点实际上是求 $f(x,y)$ 的最小值。可以使用一个更容易的方程去掉根号：

$$f(x,y) = x^2 + y^2$$

在计算最小值时候有一个限制是：

$$g(x,y) = xy = 3$$

把这个较为简单的例子用等高线图表示：

随笔分类 (211)

- ★★资源下载★★(1)
- Java并发编程(1)
- 程序员的数学(24)
- 单变量微积分(31)
- 多变量微积分(24)
- 概率(24)
- 机器学习(27)
- 软件设计(1)
- 数据分析(6)
- 数据结构与算法(27)
- 随笔(5)
- 线性代数(34)
- 项目管理(2)
- 转载(4)

随笔档案 (205)

- 2021年2月(1)
- 2020年3月(2)
- 2020年2月(6)
- 2020年1月(4)
- 2019年12月(7)
- 2019年11月(15)
- 2019年9月(3)
- 2019年8月(6)
- 2019年7月(1)
- 2019年6月(8)
- 2019年5月(3)
- 2019年4月(5)
- 2019年3月(7)
- 2019年2月(3)
- 2019年1月(7)
- 更多

阅读排行榜

- 1. 使用Apriori进行关联分析 (一) (29768)
- 2. 线性代数笔记12——列空间和零空间 (28772)
- 3. FP-growth算法发现频繁项集 (一)——构建FP树(24430)
- 4. 寻找“最好” (2) ——欧拉-拉格朗日方程(23099)
- 5. 多变量微积分笔记3——二元函数的极值(22772)

评论排行榜

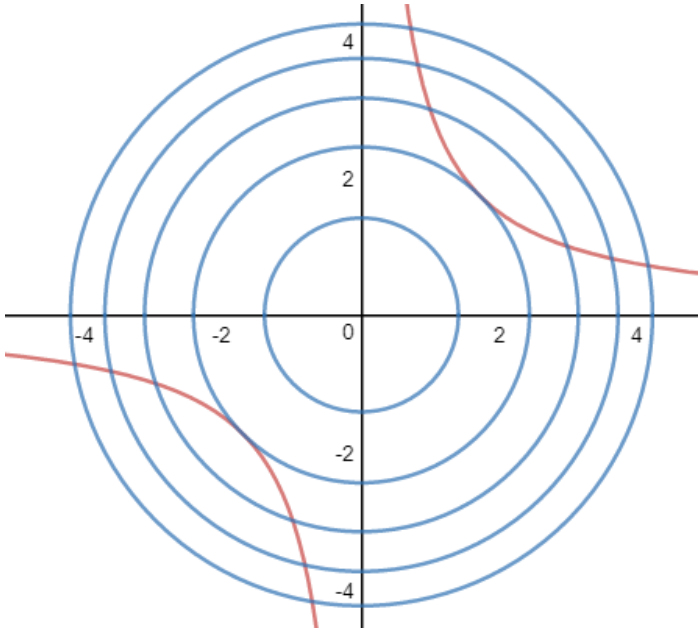
- 1. 隐马尔可夫模型 (一) (8)
- 2. 线性代数笔记12——列空间和零空间 (7)
- 3. 线性代数笔记3——向量2 (点积) (7)
- 4. FP-growth算法发现频繁项集 (一)——构建FP树(5)
- 5. 寻找“最好” (2) ——欧拉-拉格朗日方程(4)

推荐排行榜

- 1. 寻找“最好” (2) ——欧拉-拉格朗日方程(7)
- 2. FP-growth算法发现频繁项集 (一)——构建FP树(7)
- 3. 线性代数笔记3——向量2 (点积) (6)
- 4. FP-growth算法发现频繁项集 (二)——发现频繁项集(5)
- 5. 隐马尔可夫模型 (一) (5)

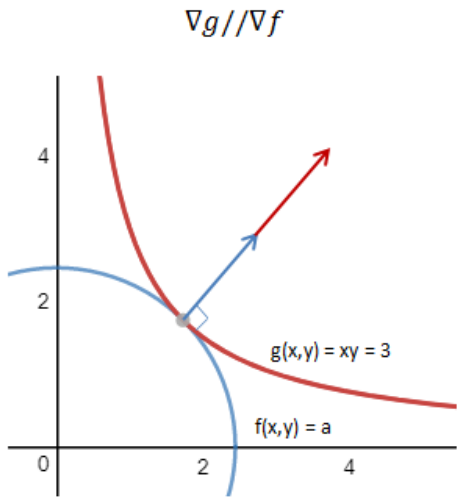
最新评论

- 1. Re:线性代数笔记3——向量2 (点积)
如果点积小于0，即夹角小于90°，这个写错了吧。应该是夹角大于90°
--猫猫猫猫猫大人



很明显，当f和g相切的时候，能得到f的最小值。如果把双曲线看作自身的等高线，那么当f的等高线和g的等高线相切时，f值最小。实际上这也是找到最值的一般情形。

如果两个等高线相切，则二者在切点处的切线也相同，也就是说它们的梯度向量平行，即：



如果两个向量平行，则其中一个向量是另一个向量的倍数，由此得到：

$$\nabla f = \lambda \nabla g$$

这里的λ是一个常数，我们需要做的是找到这个λ和特定的(x,y)使得上式成立。这实际上是把2个变量加一个关系限制的最值问题转换为一个含有3个变量的方程组。

$$\underbrace{xy = 3}_{g(x,y)=c} \text{ 下 } \underbrace{x^2 + y^2}_{f(x,y)} \text{ 的最值}$$

转换后：

$$\begin{cases} \nabla f = \lambda \nabla g \\ g(x,y) = C \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f_x = \lambda g_x \\ f_y = \lambda g_y \\ g(x,y) = C \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x = \lambda y \\ 2y = \lambda x \\ xy = 3 \end{cases}$$

2. Re:线性代数笔记10——矩阵的LU分解写的很好，不过LU分解的前提是错的，LU分解只需要第三个条件，如果允许行置换就是下面写到的PLU，可以分解所有矩阵

--wiki3D

3. Re:单变量微积分笔记20——三角替换1 (sin和cos) 很nice

--尹保棕

4. Re:线性代数笔记24——微分方程和exp(At) 有些图片挂了呢

--ccchendada

5. Re:寻找“最好” (2) ——欧拉-拉格朗日方程

提个issue，最速降线中 $v = \{2gh\}^{1/2}$ 与配图不一致，建议以起点为原点，向右伸出x轴，向下伸出y轴建立坐标系

--trustInU

现在已经通过梯度向量平行，将原来的最值问题转换为一般的方程组，这个方程组被称为拉格朗日方程组，它的解就是最值点。

接下来就是解方程组，可以将其看作是关于xy的矩阵方程：

$$\begin{cases} 2x = \lambda y \\ 2y = \lambda x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - \lambda y = 0 \\ \lambda x - 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & -\lambda \\ \lambda & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

一个满足方程组的解是 $x = 0, y = 0$ ，但这个解不满约束条件 $g(x,y) = xy = 3$ ；此外，只有当系数行列式的值是0时，方程才有多个解：

$$\begin{vmatrix} 2 & -\lambda \\ \lambda & -2 \end{vmatrix} = -4 + \lambda^2 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm 2$$

把两个值分别代入方程组：

$$\lambda = 2 \begin{cases} 2x = 2y \\ 2y = 2x \\ xy = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \pm\sqrt{3} \\ y = \pm\sqrt{3} \end{cases} \quad \lambda = -2 \begin{cases} 2x = -2y \\ 2y = -2x \\ xy = 3 \end{cases} \Rightarrow \text{无解}$$

现在可以回答原问题，双曲线 $xy = 3$ 距离原点最近的点有两个： $(3^{1/2}, 3^{1/2})$ 和 $(-3^{1/2}, -3^{1/2})$ 。

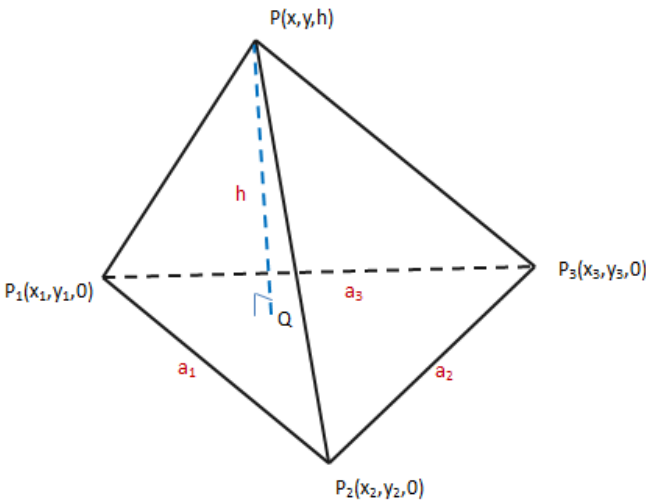
在这个例子中， λ 就是拉格朗日乘子。

最小值和最大值

拉格朗日乘数法并不会告诉我们最值的类型，结果可能是最大值、最小值或鞍点，由于存在限制条件，这里也不能像《多变量微积分3——二元函数的极值》那样使用二阶导数判断。那么如何判断是最大值还是最小值呢？只能通过将拉格朗日方程组的解代入问题方程f来判断。举例来说，如果有三组解，代入f后分别是4,6,9，在不存在边界值时，4就是最小值，9就是最大值；如果存在边界，还需要比较边界值。在双曲线的例子中，由于能够确定边界在无穷远处，所以其结果就是最小值。

表面积最小的金字塔

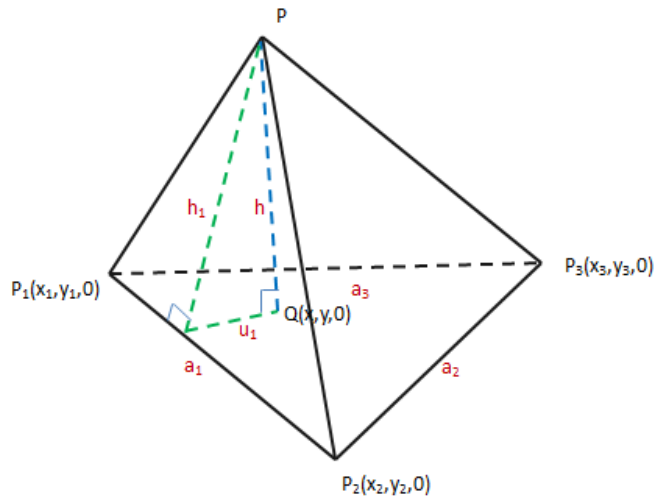
给定金字塔的体积和底面积（底面的三边确定，分别是 a_1, a_2, a_3 ），如何建造一个表面积最小的金字塔？



如上图所示，将金字塔模型放入三维坐标系中，底面对应xy轴。由于体积和底面积已知，根据体积公式，高也是定值，那么实际问题就是回答Q点的位置。一种思路是利用向量的叉积计算三角形的面积（参考《线性代数笔记4——向量3（叉积）》）：

$$S_{PP_1P_2} = \frac{1}{2} |\overrightarrow{PP_1} \times \overrightarrow{PP_2}|$$

展开后将得到一个很长的式子，看起来并不是什么好方法。现在换一种思路，利用三角形面积的几何公式，如下图所示：



h_1 是三角形 PP_1P_2 的高，设点 Q 是 $(x, y, 0)$ ，则：

$$S_{PP_1P_2} = \frac{1}{2} a_1 h_1 = \frac{1}{2} a_1 \sqrt{h^2 + u_1^2}$$

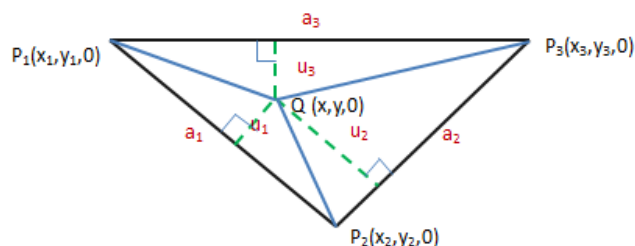
$$S_{all} = S_{PP_1P_2} + S_{PP_1P_3} + S_{PP_2P_3}$$

$$= \frac{1}{2} a_1 \sqrt{h^2 + u_1^2} + \frac{1}{2} a_2 \sqrt{h^2 + u_2^2} + \frac{1}{2} a_3 \sqrt{h^2 + u_3^2}$$

这就转换成了有三个变量的函数，目标是求得 f 的最小值：

$$f(u_1, u_2, u_3) = \frac{1}{2} a_1 \sqrt{h^2 + u_1^2} + \frac{1}{2} a_2 \sqrt{h^2 + u_2^2} + \frac{1}{2} a_3 \sqrt{h^2 + u_3^2}$$

接下来需要寻找约束条件 g 。由于 $a_1 \perp h_1$ 且 $a_1 \perp h$ ，所以 a_1 垂直于 h_1 和 h 所在的平面， $a_1 \perp u_1$ 。



上图可知：

$$S_{P_1P_2P_3} = \frac{1}{2} a_1 u_1 + \frac{1}{2} a_2 u_2 + \frac{1}{2} a_3 u_3$$

这就是约束条件 g ：

$$g(u_1, u_2, u_3) = \frac{1}{2}a_1u_1 + \frac{1}{2}a_2u_2 + \frac{1}{2}a_3u_3 = C$$

知道了 f 和 g ，就可以使用拉格朗日乘数法：

$$\nabla f = \lambda \nabla g$$

$$\nabla f = \left\langle \frac{\partial f}{\partial u_1}, \frac{\partial f}{\partial u_2}, \frac{\partial f}{\partial u_3} \right\rangle = \left\langle \frac{a_1 u_1}{2\sqrt{h^2 + u_1^2}}, \frac{a_1 u_2}{2\sqrt{h^2 + u_2^2}}, \frac{a_1 u_3}{2\sqrt{h^2 + u_3^2}} \right\rangle$$

$$\lambda \nabla g = \lambda \left\langle \frac{\partial g}{\partial u_1}, \frac{\partial g}{\partial u_2}, \frac{\partial g}{\partial u_3} \right\rangle = \lambda \left\langle \frac{a_1}{2}, \frac{a_2}{2}, \frac{a_3}{2} \right\rangle$$

$$\nabla f = \lambda \nabla g \Rightarrow \begin{cases} \frac{a_1 u_1}{2\sqrt{h^2 + u_1^2}} = \frac{\lambda a_1}{2} \\ \frac{a_1 u_2}{2\sqrt{h^2 + u_2^2}} = \frac{\lambda a_2}{2} \\ \frac{a_1 u_3}{2\sqrt{h^2 + u_3^2}} = \frac{\lambda a_3}{2} \end{cases} = \begin{cases} \frac{u_1}{\sqrt{h^2 + u_1^2}} = \lambda \\ \frac{u_2}{\sqrt{h^2 + u_2^2}} = \lambda \\ \frac{u_3}{\sqrt{h^2 + u_3^2}} = \lambda \end{cases}$$

$$\Rightarrow u_1 = u_2 = u_3$$

当Q点的位置距离三边距离相等时，金字塔的表面积最小。

备注：

f 对 u_1 偏导将 u_2 和 u_3 看作常数，这相当于求 $f(u)$ 的导数，

$$f(u) = \frac{1}{2}a_1\sqrt{h^2 + u^2} + C_1 + C_2$$

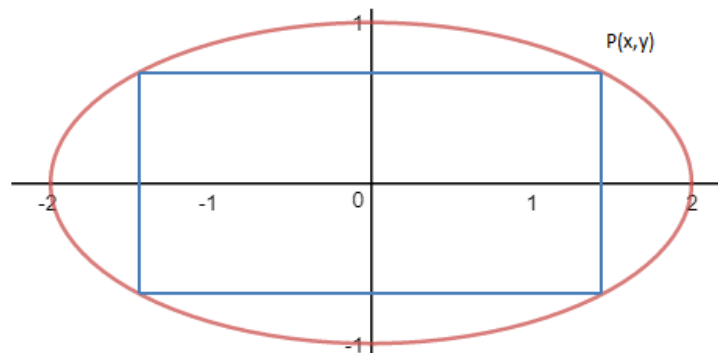
$$\text{令 } t = h^2 + u^2,$$

$$\frac{df}{du} = \frac{df}{dt} \frac{dt}{du} = \left(\frac{1}{4}a_1 t^{-1/2} \right) (2u) = \frac{a_1 u}{2\sqrt{t}} = \frac{a_1 u}{2\sqrt{h^2 + u^2}}$$

综合示例

示例1

在椭圆 $x^2 + 4y^2 = 4$ 中有内接的矩形，该矩形的边平行于 x 轴和 y 轴，找出这些矩形中周长最大的一个。



如上图所示，长方形的周长函数是 $f(x,y) = 4x + 4y$ ，约束函数 $g(x,y) = x^2 + 4y^2 = 4$

$$f(x, y) = 4x + 4y, \quad g(x, y) = x^2 + 4y^2 = 4$$

$$\nabla f = \left\langle \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right\rangle = \langle 4, 4 \rangle, \quad \nabla g = \left\langle \frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y} \right\rangle = \langle 2\lambda x, 8\lambda y \rangle$$

$$\nabla f = \lambda \nabla g \Rightarrow \begin{cases} 4 = 2\lambda x \\ 4 = 8\lambda y \end{cases} \Rightarrow x = 4y$$

$$x^2 + 4y^2 = (4y)^2 + 4y^2 = 4 \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{4\sqrt{5}}{5} \\ y = \frac{\sqrt{5}}{5} \end{cases}, \quad P(x, y) \text{ 在第一象限, } y > 0$$

$$f\left(\frac{4\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}}{5}\right) = 4 \times \frac{4\sqrt{5}}{5} + 4 \times \frac{\sqrt{5}}{5} = 4\sqrt{5}$$

由于拉格朗日乘数法无法确定最值的类型，所以还要对函数边界进行计算。当P在椭圆上移动时，如果正好落在x轴上，则长方形退化成直线，此时 $f(2,0) = 8 < 4\sqrt{5}$ ；另一个极值是 $f(0,1) = 4 < 4\sqrt{5}$ ，所以判定 $4\sqrt{5}$ 是最大值，此时长方形的一点的坐标是 $\left(\frac{4\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}}{5}\right)$

示例2

计算 $f(x,y,z) = x^2 + x + 2y^2 + 3z^2$ 在约束条件 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 下的最值。

$$\nabla f = \left\langle \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right\rangle = \langle 2x + 1, 4y, 6z \rangle$$

$$\nabla g = \left\langle \frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}, \frac{\partial g}{\partial z} \right\rangle = \langle 2x, 2y, 2z \rangle$$

$$\nabla f = \lambda \nabla g$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x + 1 = 2\lambda x \\ 4y = 2\lambda y \\ 6z = 2\lambda z \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \pm 1 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \text{ or } \lambda = 3 \begin{cases} x = \frac{1}{4} \\ y = 0 \\ z = \pm \frac{\sqrt{15}}{4} \end{cases} \text{ or } \lambda = 2 \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \\ z = 0 \end{cases}$$

由于约束条件是球体，所以不存在边界，只需把这些解代入即可。当点在 $(-1,0,0)$ 时， f 最小， $f = 0$ ；当点在 $(1/4,0,\pm 15^{1/2}/4)$ 时 f 最大， $f = 25/8$

出处：微信公众号“我是8位的”

本文以学习、研究和分享为主，如需转载，请联系本人，标明作者和出处，非商业用途！

扫描二维码关注作者公众号“我是8位的”



随笔

分类: [多变量微积分](#)

标签: [拉格朗日乘子法](#), [拉格朗日乘数法](#)

[好文要顶](#)[关注我](#)[收藏该文](#)



我是8位的
关注 - 5
粉丝 - 288

[+加关注](#)

1
[推荐](#)

0
[反对](#)

« 上一篇: [多变量微积分笔记5——梯度与方向导数](#)

» 下一篇: [多变量微积分笔记7——非独立变量](#)

posted on 2018-02-27 18:04 [我是8位的](#) 阅读(6029) 评论(0) [编辑](#) [收藏](#) [举报](#)

[刷新评论](#) [刷新页面](#) [返回顶部](#)

登录后才能查看或发表评论, 立即 [登录](#) 或者 [逛逛](#) [博客园首页](#)

【推荐】华为 HWD 2022 故事征集, 分享最打动你的科技女性故事

【推荐】华为开发者专区, 与开发者一起构建万物互联的智能世界

广告 X

yo zodcs.com

永中DCS, 文档在线
预览处理专家

10年行业经验, 受到众多政府客户、央企单位、邮箱客户、OA办公系统、招聘网站、教育客户青睐

了解详情 >

编辑推荐:

- 革命性创新, 动画杀手铜 @scroll-timeline
- 戏说领域驱动设计 (十二) —— 服务
- ASP.NET Core 6框架揭秘实例演示[16]: 内存缓存与分布式缓存的使用
- .Net Core 中无处不在的 Async/Await 是如何提升性能的?
- 分布式系统改造方案 —— 老旧系统改造篇

#她的梦想在发光#
HWD科技女性故事有奖征集
活动时间: 2022年3月8日-3月18日

最新新闻:

- 乔布斯的创业搭档: 他缺乏工程师才能, 不得不锻炼营销能力来弥补
- 美国大厂码农薪资曝光: 年薪18万美元, 够养家, 不够买海景房
- 两张照片就能转视频! Google提出FLIM帧插值模型

- Android 再推 “杀手级” 功能，可回收 60% 存储空间
- 溺在理财暴雷潮的投资人：本金63万，月兑25元不够卖菜
- » 更多新闻...

Powered by:
[博客园](#)

Copyright © 2022 我是8位的
Powered by .NET 6 on Kubernetes